Pr. Mohamed CH-CHAOUI

Devoir Libre SMIA s2
A rendre: mohamed.ch-chaoui@edu.uca.ma
Date limite: 24 Juillet 2020

Exercice 1

1. Montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a,\, b]$ dans $\mathbb{R}$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\,\sin(nx)\,dx = 0.$$

2. Montrer que l'application f définie sur $]0,\, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\, \frac{\pi}{2}]$.
3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}\,dx$
4. On pose $K_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}\,dx$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

5. Déduire de ce qui précède que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Exercice II. Soit $a \in]-\pi,\, \pi[$ Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\,dt$$

1. 1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et donner une expression de sa dérivée sans symbole intégral
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3. Montrer que f possède une limite finie en 0 que l'on déterminera. On pourra étudier le comportement quand x tend vers 0 de $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos t\, -1}{t}\,dt$

Exercice III. Calculer la limite des suites suivantes :

$$S_{1,n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$$

$$S_{2,n} = \frac{1}{n}\left(\sin(\frac{\pi}{n}) + \sin(\frac{2\pi}{n}) + ... + \sin(\frac{n\,\pi}{n})\right)$$

Résoudre l'équation différentielle :

$$x(1+\ln^2 x)y' + 2\ln x y = 1 \text{ sur }]0,\, +\infty[$$